# Využití heuristických strategií pro řešení úloh v matematice na 2. a 3. stupni

Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Materiály byly vytvořeny v rámci řešení projektu GAČR P407/12/1939 (řešitelská pracoviště Univerzita Karlova v Praze, pedagogická fakulta, a Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Přírodovědecká fakulta)

## Úvod

Základem úspěšného vyučování matematice je řešení úloh, které pomáhá rozvoji tvořivosti, jejímu rozšiřování a kultivaci. Jak se dá poznat, zda se žák něco z matematiky naučil? V tradičním pojetí matematiky ve škole učitelé používají úlohy hlavně jako nástroje pro testování, které pomáhají učiteli rozlišit mezi žáky, kteří „rozumějí“ látce, a těmi, kteří nesupěli. Žáci vidí úlohy hlavně jako nástroj na hodnocení.

Na řešení úloh ve vyučování matematice je možné pohlížet i z jiné perspektivy: Je ukazatelem stavu porozumění pojmům, kterým se žáci učí. Úlohy pomáhají řešitelům rozhodnout, které předchozí znalosti lze aplikovat v nové situaci, jakou roli tato znalost hraje, která znalost je neužitečná nebo dokonce chybná a stává se překážkou pro další rozvoj jejich znalostí a dovedností.

Dovednost řešit úlohy se rychle zvětšuje, když řešitel získává nové zkušenosti s touto činností. Výkony žáků při řešení se zlepšují, když se opakovaně setkávají s úlohami podobného typu, kde mohou použít své předchozí zkušenosti. Jak může učitel zjistit, zda žák učivu porozuměl? Jednou z možností je žákova schopnost přicházet s novými, originálními řešitelskými postupy při řešení nové úlohy.

Jak lze situaci zlepšit? Vyučování matematice založené na řešení úloh bez předávání hotových poznatků žákům, tzn. řešení tvořivým způsobem, musí být podloženo dobrou znalostí matematiky učitelů, jejich vlastní zkušeností s tvořivým přístupem k řešení úloh, ale také dostatkem informací a materiálů připravených k použití ve výuce.

Nelze ovšem očekávat, že by žáci začali používat heuristické strategie spontánně, pokud nemají podporu učitele nebo někoho jiného. Jedna z možností: Využívat úlohy, které lze snadněji, pohodlněji vyřešit pomocí jedné nebo více heuristických strategií místo algoritmických školských strategií.

V semináři se zaměříme hlavně na důležitost a role situací, které podporují matematickou tvořivost žáků (nalézání vlastních řešitelských postupů v nestandardních situacích), a na možnosti, které má učitel pro to, aby změnil přístup žáků k řešení úloh pomocí algoritmu, který jim byl předložen, směrem k vlastnímu tvořivému hledání vhodných, i když někdy „neškolských“ řešitelských strategií.

## Sledované objevitelské strategie

### *I. Strategie analogie*

Analogie je určitý druh podobnosti. Máme-li řešit určitý problém, najdeme si analogický problém, tj. problém, který bude pojednávat podobným způsobem o analogickém objektu. Pokud se nám podaří tento nový problém vyřešit, nebo pokud jeho řešení známe, můžeme často metodu jeho řešení nebo výsledek použít i při řešení původního problému.

### *II. Pokus – ověření – korekce*

Jde o strategii, při které nejprve na základě našich zkušeností odhadneme řešení předloženého problému. Následně ověříme, zdali toto řešení vyhovuje zadání. Další případný odhad již uděláme na základě toho, jak vyšel předchozí výsledek. Takto postupujeme dále až do nalezení řešení.

### *III. Systematické experimentování*

Systematické experimentování je strategie, při které se pokoušíme nalézt řešení problému pomocí jednotlivých experimentů. Nejprve vhodně aplikujeme algoritmus, pomocí kterého se snažíme vyřešit problém. Pak systematicky měníme vstupní hodnoty algoritmu tak dlouho, až nalezneme správné řešení.

### *IV. Přeformulování problému*

Při použití této strategie přeformulujeme zadanou úlohu na novou, někdy zcela jinou, úlohu, která je pro nás snadnější k řešení a jejíž řešení je buď přímo řešením původní úlohy, nebo nám její řešení podstatně přibližuje. Speciálním a velmi důležitým případem této strategie je překlad úlohy z jednoho matematického jazyka do jazyka jiného. Klasické úlohy geometrie, jako byla např. trisekce úhlu, se podařilo vyřešit ve chvíli, kdy byly přeloženy do jazyka algebry.

### *V. Řešitelský obrázek*

Při použití grafické cesty si obvykle úlohu znázorníme pomocí obrázku. V něm vyznačíme to, co je dáno, a často i to, co chceme získat. Obrázek, který takto získáme, se nazývá ilustrační obrázek, neboť graficky znázorňuje řešenou problematiku. Někdy nás již pomocí tohoto znázornění napadne řešení dané úlohy. Ve většině případů však s obrázkem různě manipulujeme (např. dokreslujeme vhodné pomocné prvky) a pomocí takto doplněného obrázku úlohu vyřešíme. Takovému obrázku pak říkáme řešitelský obrázek.

### *VI. Využití grafů funkcí*

Pokud jsou v zadání úlohy funkce nebo pokud se při řešení ukáže, že je vhodné nějaké funkce zavést, pak je obvykle vhodné si sestrojit grafy těchto funkcí. Takovéto grafy často velmi podstatným způsobem přispějí k nalezení řešení daného problému.

### *VII. Vypuštění podmínky*

Pokud nejsme schopni při řešení nějaké úlohy splnit najednou všechny požadované podmínky dané úlohy, můžeme se pokusit některou z nich (či postupně i více z nich) vypustit. Pokud se nám povede takto oslabenou úlohu vyřešit, k vypuštěné podmínce se vrátíme a úlohu se pokusíme dořešit. Typickými úlohami tohoto typu jsou úlohy řešitelné pomocí stejnolehlosti.

### *VIII. Cesta zpět*

Při strategii cesta zpět předpokládáme, že to, co máme dokázat, resp. vypočítat, zkonstruovat, platí, resp. existuje. Pak se snažíme z toho předpokladu odvodit něco, co už víme nebo co se dá lehko dokázat, resp. vypočítat či zkonstruovat. Od koncové situace se tak snažíme přiblížit se co nejvíc k situaci počáteční. Postup pak v konečném důkazu, výpočtu či konstrukci obrátíme.

Jedná se o strategii poměrně často v matematice používanou (viz např. rozbor konstrukční úlohy v geometrii nebo rozbor při konstrukci důkazu věty, která má stavbu implikace). Nemusíme však pomocí ní nalézt celou cestu, jak daný problém vyřešit. Připomeňme, že při rozboru konstrukční úlohy obvykle začínáme větou: Předpokládáme, že úloha má řešení a že obrázek, který jsem si načrtl, představuje jedno z těchto řešení. Touto frází si právě připravujeme půdu pro použití této strategie.

### *IX. Zobecnění a konkretizace*

Těmto dvěma strategiím by se ve školské matematice měla věnovat mimořádná pozornost, protože obě stojí v samotném centru toho, čemu se říká matematické myšlení. Velmi úzce spolu souvisejí.

Někdy máme zadaný problém. Ukáže se, že pomocí jeho konkretizace dostaneme problém, který umíme vyřešit a že pomocí tohoto řešení dokážeme vyřešit i původní problém. Návrat k původnímu problému pak představuje zobecnění. Někdy naopak zadaný problém zobecníme a dostaneme tak problém, který jsme schopni vyřešit. Pomocí konkretizace se pak následně vrátíme k problému původnímu.

### *X. Zavedení pomocného prvku*

Při řešení matematických problémů se někdy ukazuje vhodné do tohoto řešení vložit pomocný prvek. Můžeme při tom být vedeni např. přesvědčením, že tím převedeme danou úlohu na problém, který jsme již dříve řešili nebo že vznikne jednodušší problém, který již budeme schopni vyřešit. Takovým pomocným prvkem při řešení geometrických problémů může být např. bod nebo přímka, někdy to však může být i složitější geometrický útvar. V algebře při řešení rovnic to obvykle bývá nová proměnná, kterou zavedeme. Často pak mluvíme o řešení rovnice pomocí substituce.

### *XI. Rozklad na jednodušší případy*

Při této metodě rozložíme zadaný problém na několik jednodušších úloh, které vyřešíme. Řešení zadané úlohy pak dostaneme spojením řešení všech jednodušších úloh. Tato strategie se ve školské matematice typicky používá při řešení rovnic nebo nerovnic s absolutními hodnotami.

### *XII. Užití falešného předpokladu*

Tato strategie patří díky svému počátečnímu kroku do rodiny heuristických strategií označovaných jako experimentování. Řešitel na začátku určí odhad výsledku, u kterého si je však vědom toho, že je pravděpodobně nesprávný (falešný). Provede ověření, v rámci kterého zjistí nejen, jestli jeho hodnota vyhovuje zadání úlohy (tak jak to probíhá i u strategií Pokus – Ověření – Korekce a Systematické experimentování), ale i to, jak moc se od hodnoty požadované liší. Přesněji řečeno, kolikrát je požadovaná hodnota jiná než hodnota námi získaná. Na základě tohoto zjištění provede úpravu předpokládaného výsledku. Podstatný je však charakter této korekce. Řešitel totiž neučiní, tak jako u strategie Pokus – Ověření – Korekce, další odhad, ale sofistikovaně již provede výpočet vedoucí k výsledku.

Na rozdíl od jiných druhů experimentování tato strategie není univerzální, ale je specifická pro určité typy úloh. Mezi tyto úlohy patří ty, u kterých se v zadání objevuje určitá hodnota, která má poměrový vztah k námi hledané hodnotě. Z matematického pohledu v pozadí těchto úloh stojí linearita vztahů. Na mysli tedy máme úlohy, kde výstupní hodnoty jsou lineárně závislé na vstupních hodnotách. Určením koeficientu podobnosti získáme údaj, jak změnit námi předpokládanou hodnotu výsledku (falešný předpoklad). Popsanou strategii vzápětí budeme ilustrovat několika úlohami.